# NOVA THEORIA

DE

# PARALLELARUM RECTARUM PROPRIETATIBUS,

AUCTORE

DANIELE HUBERO,

Basileense, in Acad. patria mathem. Professore, et Bibliothecario.

BASILEAE 1823.

Sumptibus Librariae Schweighauser.

# PRAEFATIO.

Iam inde a *Gemini* et *Posidonii* temporibus, ut testatur *Proclus*, valde exercuit mathematum cultores doctrina de linearum parallelarum proprietatibus, quam *Euclides* in Elementis suis exposuerat, quæ vero summæ perspicuitati et admirabili propositionum juncturæ, quæ in reliquis aurei operis partibns elucent, minime congruere videtur. Plurimis ergo de hoc argumento theoriis, quæ aut in variis geometriæ systematibus inveniuntur, aut singularibus libellis expositæ sunt, novum tentamen addere superfluum videri posset; novam tamen hanc meam theoriam, evidentissimis suffultam principiis eo minus dubitavi in publicum emittere, quum, ut verum fatear, nulla omnino earum, quæ hucusque mihi innotuerunt (fuerunt autem permultæ), plane mihi satisfecerit. Accuratius enim earundem examen me edocuit eas aut niti principiis longius arcessitis, neque semper eo evidentioribus, aut axiomata, modo tacite, modo expressis verbis, assumere, haud facile ab omnibus concedenda.

*

Omnis quidem rectarum parallelarum theoria, præter communia geometriæ principia, uno alterove indiget axiomate speciatim ipsam attingente; sic et mihi propositione quadam opus erat, quam axiomatis loco habui, quum intellectui licet arridens eundemque ad assensum quasi impellens, demonstrationem non admittat; nullusque dubitavi eandem pro vexatissimo *Euclideano* axiomate undecimo substituere.

Rigoris geometrici simul et perspicuitatis studiosissimus, et objectiones præveniendi cupidissimus, plura explicui, plura demonstravi, quæ ampliore explanatione haud indigere videntur, quin et quandoque in plures diduxi propositiones, quæ unica comprehendi potuissent, tandem hinc inde expressis verbis proposui ab aliis tacite assumta, quo clarius pateat quibus demum principiis universa theoria nitatur. Libellus his de causis verbosior æqui et benevoli Lectoris veniam implorat. Feliciori, quam mihi, forsan olim continget, positis iisdem, quibus usus sum, principiis, aut etiam omnino diversis, theoriam istam concinniorem reddere et paucioribus propositionibus expedire.

Dabam Basileæ Helvetiorum
1822. Dec. 7.

# NOVA THEORIA
## DE
# PARALLELARUM RECTARUM
## PROPRIETATIBUS.

### PROTHEORIA.

*Euclides* ex præmissis in limine geometriæ propositionibus aliquot circa lineas, angulos et triangula versantibus, in parallelarum rectarum affectiones inquirit, quibus dein, ad triangula iterum conversus, celebre theorema superstruit: quod scilicet in omni triangulo trium angulorum simul sumtorum summa æqualis sit duobus angulis rectis simul sumtis.

In hac vero nostra theoria tantummodo exigua pars doctrinæ de parallelarum proprietatibus præcedit theorema illud de angulorum in triangulo summa; ad cujus demonstrationem opus est axiomate, quod in locum antiquati axiomatis XImi *Euclideani* substitutum est. Tandem illud ipsum theorema reliquis tum parallelarum tum æquidistantium linearum affectionibus demonstrandis inservit.

Cæterum theoria ista hic instar supplementi ad *Euclidis* Elementorum librum primum exposita est, nec in propriam copiosamqne disputationem diducta; versantnr enim in omnium manibus cedro digna illa *Elementa*, ad quæ igitur provocare tuto licebit. Propositiones *Euclidis* propius theoriam hanc spectantes, aut ipsæ hic proferuntur et demonstrantur, aut saltem earundem enunciata recensentur, retentis ubique iisdem numeris ordinalibus, quibus *Euclides* usus est; insertæ vero propositiones numero insignitæ sunt illius *Euclideanæ* propositionis, quam proxime sequuntur, adjectis literis alphabethi majusculis, quo ab illis, et inter se distinguantur.

# DEFINITIONES.

*Definitio. X.*

*Cum recta linea super rectam lineam insistens, eos, qui sunt deinceps angulos æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum; et quæ insistit recta linea perpendicularis vocatur ad eam cui insistit.*

*Corollarium.*

Hinc ad datum rectæ lineæ punctum plus una perpendiculari ad rectam excitari nequit.

*Definitio XIV.*

*Figura est: quod aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.*

*Definitio XIV. A.*

*Figura plana est: superficies plana, linea vel lineis contenta, et ab iisdem undique terminata.*

*Definitio XXXV.*

*Parallelæ rectæ lineæ sunt, quæ cum sint in eodem plano et ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter se conveniunt.*

*Scholium.*

Parallelas rectas lineas memorat græcus *Euclidis* textus, in editionibus *Basileensi*, *Oxoniensi* et *Parisiensi*, quam etiam secuti sunt

*Zambertus*, *Clavius*, *Barrovius*, *Alii.* *Commandinus*, eumque secutus *Taquetus* et *Rob. Simpsonus* vertunt: *parallelæ seu æquidistantes rectæ;* quin *Campanus*, qui non Elementorum græcum textum, sed versionem arabicam latino sermone expressit, *parallelas* lineas semper *æquidistantes* vocat. Nos *Euclidem* pressius sequi satius duximus.

*Definitio XXXV. A.*

*Puncti distantia a recta linea est rectarum a puncto ad illam rectam deductarum brevissima.*

*Definitio XXXV. B.*

*Linea vocatur rectæ lineæ æquidistans, quando, cum utræque sint in eodem plano, omnia lineæ puncta æquales a recta distantias habent.*

*Scholium.*

De eo num linea recta sit, nec ne, nihil hac definitione affirmatur; demonstrabitur vero infra: nonnisi rectam rectæ æquidistantem esse posse.

*Scholium generale ad definitiones.*

Signa additionis, subtractionis, æqualitatis, majoritatis, minoritatis, quorum usus jam pridem invaluit, etiam hic adhibebuntur; et quum in tractatione sæpius angulorum rectorum mentio fiet, ejusmodi angulus litera R semper indicabitur.

## AXIOMATA.

*Axioma X.*

*Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.*

*Axioma X. A.*

*Si per duo puncta* A, B, *ad diversas rectæ lineæ* C D *partes posita, agatur recta* A B: *hæc inter illa duo puncta illam rectam* C D *alicubi secabit.* 1.

*Axioma X. B.*

*Recta linea* D E, *habens sui partem* F E *intra figuræ planæ* A B C *ambitum, si producitur, exibit e figura, et alicubi secabit lineam, sive lineas, quibus figura comprehenditur.* 2.

*Scholium.*

Bina hæcce axiomata theoriæ nostræ non sunt propria, et ab ipso *Euclide* hinc inde tacite adhibentur.

*Axioma XI.*

*Ex parallelarum rectarum* A B, C D *alterius* A B *puncto quodlibet* E *excitata perpendicularis* E F, *satis producta, alteram parallelam* C D *utrinque in infinitum productam alicubi secabit.* 3.

*Scholium.*

Hic ab *Euclide* discessum est aliudque axi-

oma assumtum, loco celebris illius de binarum rectarum concursu, quæ sectæ a tertia angulos interiores ad eandem partem simul sumtos duobus rectis angulis minoris efficiunt; quod in theorema conversum infra demonstrabitur.

*Axioma XII. B.*

*Si ad quamlibet quantitatem, quantumvis parvam, ipsi æqualis adjiciatur, et ad summam iterum adjectæ æqualis addatur, et sic porro: poterit tandem ad summam perveniri, quæ omnem aliam quantitatem ejusdem generis, quantumvis magnam excedit.*

*Scholium.*

Hoc axioma ab *Euclide* in demonstranda prima propositione libri Xmi tacite assumtum, sub axiomatis aut postulati specie proferunt editores et commentatores: *Campanus*, *Commandinus*, *Clavius*, eumque secutus *Florimondus Puteanus*, *Dibuadius*, *Barrovius*, *Bærmannus.*

*Corollarium.*

Eo autem citius data qualibet quantitate ad summam omni data quantitate majorem perveniri poterit: si non tantummodo addatur continuo eadem quantitas, sed si id, quod adjicitur, summam, cui adjectum est, semper adæquat; id est, si datæ quantitatis sumatur duplum, et ejus quod prodit iterum duplum, et hujus porro duplum, et sic deinceps.

# PROPOSITIONES.

*Propositio XI. A. Theorema.* 4.

*Recta linea A D ducta per alterum trianguli A B C angulum, si satis producatur secabit alicubi latus oppositum.*

Exibit enim producta A D ex triangulo [1]); non autem potest exire, ita ut secet latera A B, A C, in utroque enim casu binæ rectæ spatium comprehenderent, quod repugnat. [2])

1) Ax. X. A.

2) Ax. X.

*Prop. XV. A. Theor.* 5.

*Dato quolibet angulo B A C, si in altera rectarum A C producta accipiatur punctum quodumque D, à quo ad quodlibet alterius rectæ A B punctum E agatur recta D E, eaque producatur in infinitum: producta hæc semper intra angulum B A C continebitur.*

Nam si producta E F ex angulo B A C exiret, necessario secaret alteram rectarum A B, A C, in utroque autem casu binæ rectæ spatium includerent, quod fieri nequit. [1])

1) Ax. X.

*Scholium.*

Inest tacite hoc theorema demonstrationi propositionis XVI. *Euclidis*, quam mox paucis mutatis proferemus. Huic vero propositioni quum plures aliæ aeque potiores geometriæ propositiones innitantur, demonstrationem ejus præmisso hoc lemmate firmare operæ pretium visum est.

*Prop. XVI. Theor.*

6. *Omnis trianguli* A B C *altero latere* B C *producto exterior angulus* A C D *utrovis interiore et opposito* B A C, A B C *major est.*

Secetur A C bifariam puncto E, et ducta B E producatur ad F, ponaturque ipsi B E æqualis E F, tandemque agatur F C.

Quoniam anguli A C D crure altero D C producto in B, et ab aliquo productæ rectæ puncto B ad aliud E alterius cruris A C ducta est recta B E, ea producta semper intra angulum A C D continebitur [1]), ergo etiam recta C F intra eundem angulum sistetur, et angulus E C F ipso A C D minor erit. Quoniam porro in triangulis A E B, C E F latera E A, E B, lateribus E C, E F per constructionem æquantur, præterea anguli a lateribus illis intercepti A E B, C E F æquales sunt [2]): erunt triangula E A B, E C F inter se æqualia, et anguli, qui æqualibus lateribus opponuntur inter se æquales erunt [3]); erit itaque angulus E C F = E A B; est vero A C D > E C F, ergo etiam A C D > E A B. Simili plane modo, si producatur latus A C, demonstrari potest angulum B C G > A B C; est vero A C D = B C G [4]), ergo etiam A C D > A B C.

1) XV. A.
2) XV.
3) IV.
4) XV.

*Prop. XVII. Theor.*

*Omnis trianguli duo anguli, quomodocunque sumpti, duobus rectis minores sunt.*

*Corollarium* 1.

Hinc in omni triangulo duo recti anguli, aut duo obtusi, aut rectus et obtusus, esse nequeunt.

*Coroll.* 2.

In omni triangulo rectangulo angulus rectus, et in omni obtusangulo angulus obtusus, est angulorum maximus.

*Coroll.* 3.

In omni triangulo angulus, qui æqualem aut majorem habet, est angulus acutus, id est recto minor.

*Coroll.* 4.

Si recta C D cum recta A B inæquales angulos efficit, et e puncto quolibet E illius rectæ ad alteram A B demissa est perpendicularis E F, hæc semper ad partes minoris anguli (acuti) D C F cadet. Nisi enim id fieret, triangulum prodiret angulum rectum habens simul et obtusum, quod propositioni huic repugnat.

7.

*Prop. XVIII. Theor.*

*Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit.*

*Prop. XIX. Theor.*

*In omni triangulo major angulus à majore latere subtenditur.*

*Prop. XIX. A. Theor.*

*Omnium rectarnm C G, C D, C E, C F, a puncto quolibet C ad datam rectam A B de-*

8.

*missarum, ea, quæ perpendicularis est, c d, minima erit.*

In triangulo c d e, in d rectangulo, est angulus c d e > c e d[1]); ergo c e > c d[2]). Et sic de omni alia c g, c f, demonstratur, quod sit major ipsa c d; ergo hæc c d est omnium minima.

1) XVII. Cor. 2.
2) XIX.

*Prop. XIX. B. Theor.*

8. *Hinc puncti cujuslibet c distantia a data recta a b æqualis est perpendiculari rectæ c d ex c in a b demissæ.*

Est enim distantia puncti c a recta a b rectarum, quæ ex c in a b duci possunt, brevissima[1]); atqui perpendicularis c d est omnium ex c in a b demissarum brevissima[2]), ergo c d est distantia puncti c a recta a b.

1) Def. XXXV. A.
2) XIX. A.

*Prop. XXIII. Probl.*

*Ad datam rectam lineam, et ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.*

*Prop. XXVI. Theor.*

*Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habent, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod uni aequalium angulorum subtenditur, vel quod aequalibus adjacet angulis: et reliqua latera reliquis lateribns æqualia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.*

*Prop. XXVII. Theor.*

*Si in duas rectas lineas* A B, C D *recta linea* E F *incidens alternos angulos* A E F, D F E *inter se æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.* 9.

Si enim rectæ A B, C D non sunt parallelæ, productæ vel ad partes B D, vel ad partes A C convenient. Producantur, conveniantque ad partes B D in puncto G. Trianguli jam E G F angulus externus A E F major est interiore et opposito E F G [1]), quod hypothesi repugnat; non igitur rectæ A B, C D ad partes B D convenient, et pari modo evinci potest nec ad partu A C convenire, ergo sunt parallelæ. [2])

1) XVI.

2) Def. XXXV.

*Prop. XXVIII. Theor.*

*Si in duas rectas lineas* A B, C D *recta linea* H I *incidens exteriorem angulum* H E B *interiori et opposito et ad easdem partes* E F D *æqualem fecerit; vel interiores et ad easdem partes* B E F, D F E, *æquales duobus rectis: rectæ lineæ* A B, C D *erunt inter se parallelæ.* 9.

Quoniam angulus H E B ipsi E F D, per hypothesin, æqualis est, idem vero H E B ipsi ad verticem opposito A E F itidem æquatur [1]), erunt alterni E F D, A E F æquales, ergo rectæ A B, C D parallelæ [2]) Rursus quoniam anguli B E F, D F E simul sumti æquales sunt duobus rectis simul sumtis, per hypothesin, itemque

1) XV.

2) XXVII.

3) XIII. B E F + A E F = 2. R. 3): erunt B E F + D F E = B E F + A E F, et ablato communi B E F, erunt reliqui D F E, A E F æquales; sunt autem alterni, ergo iterum rectæ A B, C D sunt parallelæ.

*Prop. XXVIII. A. Theor.*

10. *Si in binas rectas A C, B D incidens tertia A B, angulos interiores et ad easdem partes C A B, D B A simul sumtos minores angulo recto effecerit, convenient illæ rectæ alicubi in puncto E.*

1) XXIII. 2) XXVII. 3) Ax. XI. Facto enim angulo A B H = B A C [1]), erit H B ipsi A C parallela [2]), et excitata in B ad H B perpendicularis B F, satis producta, rectam A C secabit alicubi in G [3]). Quoniam igitur F B A + A B H = F B H = R, et A B H = C A B, utrumque per constructionem: erit F B A + C A B = R; per hypothesin vero est D B A + C A B < R, erit ergo, ablato communi C A B, D B A < F B A. Ducta itaque est B D per alterum trianguli A B G angulum, secabit itaque satis pro-

4) IX. A. ducta latus oppositum A G [4]); conveniunt itaque rectæ A C, B D.

*Prop. XXVIII. B. Theor.*

11. *Si binæ rectæ A B, A C efficiant angulum B A C < ½ R, excitata e quovis alterius rectæ A B puncto D perpendicularis secabit alteram rectam A C, satis productam, alicubi in G.*

1) XXIII. Fiat D F = A D, et ex F agatur recta F H ita, ut angulus A F H = B A C [1]), hæc recta A C,

F H convenient alicubi[2]), puta in G, et duc D G. Habet jam triangulum A F G, per constructionem, angulos ad basin F A G, A F G inter se æquales, habebit ergo eos angulos subtendentia latera A G, F G inter se æqualia[3]). In triangulis porro A D G, F D G latus D G commune est, itemque A D, A G æquantur ipsis F D, F G, habent ergo tria latera respective æqualia; ergo et anguli A D G, F D G, qui æqualibus lateribus continentur, æquales erunt[4]), sunt ergo recti et D G perpendicularis[5]). Secat autem D G ipsam A C; ergo ex rectæ A B puncto quolibet D excitata perpendicularis D G alteram rectam A C secabit; nam ad punctum D, alia ad A B perpendicularis, diversa a D G non excitari potest[6]).

2) XXVIII.
3) VI.
4) VIII.
5) Def. X.
6) Def. X. Cor.

*Prop. XXVIII. C. Theor.*

12.

*Dato quovis triangulo A B C potest super eadem basi A B constitui infinita triangulorum series A B F, A B H, A B K, etc. quorum (I.) quodlibet trium angulorum summam æqualem habet summæ trium angulorum trianguli dati A B C; quorum (II.) anguli F, H, K etc. basi oppositi, continuo decrescunt; ita ut (III.) isti anguli decrescentes tandem omni dato angulo rectilineo minores fiant.*

Sit angulus A B C maximus in triangulo, et accipiatur latus A B ei angulo adjacens pro basi. Bisecetur minori angulorum basi adjacentium oppositum latus B C puncto E, ductaque A E protrahatur in F ita ut E F = A E,

et ducatur B F. Hæc recta B F iterum puncto G bisecetur, agatur A G, eaque producta, fiat G H = A G, et agatur B H. Et sic concipiatur similis operatio in infinitum iterata, et producatur tandem A B in D.

(I.) Quoniam jam in triangulis A E C, F E B latera A E, E C æquantur lateribus F E, E B, per constructionem, angulique ad verticem oppositi A E C, F E B itidem æquales sunt [1]): erunt et reliqui istorum triangulorum anguli inter se æquales, E A C ipsi E F B, et A C E ipsi F B E; ergo E A C + A C E = E F B + F B E, et additis utrinque angulis E A B + A B E erit: E A C + E A B + A B E + A C E = E F B + F B E + A B E + E A B, id est: C A B + A B C + A C B = A F B + A B F + B A F. Æqualis est igitur summa trium angulorum in triangulo A B F summæ trium angulorum trianguli A B C. Sic pari modo demonstratur: summam angulorum trianguli A B H æquari summæ angulorum trianguli A B F, ergo etiam istius trianguli A B H anguli simul sumti æquantur angulis trianguli A B C simul sumtis; et sic porro idem demonstratur de triangulis A B K etc. in infinitum.

(II.) Quia porro ponitur angulus A B C > C A B, erit, à potiori A B C > B A E; sed et foret A B C > B A E, etsi A B C = C A B. In utroque itaque casu in triangulo A B E erit A E > B E [2]); ergo etiam A E > C E, quum B E =

1) XV.

2) XIX.

C E, adeoque in triangulo C A E erit angulus A C E > C A E [2]). Est vero C A E = A F B, ergo etiam A C B > A F B. Eodem plane modo demonstratur angulus A F B > A H B, A H B > A K B, et sic porro; decrescunt ergo in infinita triangulorum serie A F B, A H B, A K B etc. anguli F, H, K, etc. qui basi A B oppositi suut.

2) XVIII.

(III.) Quod isti anguli decrescentes F, H, K etc. tandem omni dato angulo rectilineo minores evadant, sic evincitur. Si enim negatur, sit angulus rectilineus X, quo non minores evadunt anguli F, H, K etc. Ad rectam quamlibet P Q constituatur angulus Q P S, ipsi X æqualis [1]), ad rectam P S et ad punctum in ea P constituatur iterum ipsi X æqualis angulus, et sic toties summatur angulus X, donec summa Q P V angulum C A B excedat [2]). Sit jam N angulorum X in Q P V contentorum numerus, et sumantur item in illa infinita angulorum F, H, K etc. serie N termini, eo, quo positi sunt ordine; quum ergo isti termini F, H, K, etc. continuo decrescunt, nec tamen minores ipso augulo X evadunt, sequitur: eorundem summam majorem esse summæ angulorum X, qui sumebantur, id est majorem angulo Q P V, et, a potiori, majorem angulo C A B. Quia porro in triangulo A B C angulus A B C ponitur maximus, erit latus A C > A B [3]), est vero B F = A C ergo et B F > A B, adeoque in triangulo A B F,

1) XXIII.

2) Ax. XXIII. A.

3) XIX.

*

4) XVIII. angulus F A B > F [4]), id est F A B > C A F. Si igitur ab angulo B A C aufertur angulus F, relinquitur F A B, major ablato, et pari modo demonstratur, quod si auferatur angulus H a reliquo F A B, iterum relinqui H A B > H, et sic porro. Possunt itaque omnes anguli F, H, K etc. numero N simul auferri ita ut remaneat aliquis angulus; ergo isti anguli simul sumti minores sunt angulo B A C. Modo autem vidimus candem summam > B A C. Hæc autem repugnant. Perperam itaque supponitur angulos F, H, K, etc. non minores evadere quolibet angulo dato rectilineo X; potest adeo, satis continuata angulorum F, H, K, etc. serie, tandem perveniri ad angulum quovis dato angulo rectilineo minorem.

*Corollarium.*

Datum ergo quodcunque triangulum potest in aliud transformari, cujus alter angulus quovis dato angulo rectilineo minor est, quod vero omnium angulorum summam æqualem habet summæ trium angulorum trianguli dati.

*Propos. XXVIII. D. Theor.*

13. *Omnis trianguli A B C tres anguli simul sumti majores esse nequeunt duobus angulis rectis simul sumtis.*

Trianguli A B C angulorum summa excedat, si fieri potest, binos rectos angulo Y. Transformetur A B C in aliud triangulum A B D

eandem habens angulorum summam, cujus vero alter angulus D $<$ Y[1]), et producta A B in E, ad punctum B rectæ B E constituatur angulus E B F $=$ Y, et ad punctum B rectæ B F constituatur angulus F B G $=$ D[2]).

1) XXVIII. C. Cor.

2) XXIII.

Jam quia, per suppositionem, in triangulo A B C anguli simul sumti $=$ 2. R $+$ Y, erit etiam in A B D triangulo: A B D $+$ B A D $+$ A D B $=$ 2. R $+$ Y; ergo: A B D $+$ B A D $+$ A D B $=$ A B D $+$ D B E $+$ E B G $+$ F B G, et ablatis summis æqualibus A B D $+$ A D B, et A B D $+$ F B G, erit: D A B $=$ D B E $+$ E B G, ideoque D B E $<$ D A B, id est: exterior angulus trianguli A B D minor interno et opposito, quod fieri nequit[3]). Non igitur A B D trianguli angulorum summa $>$ 2. R, ideoque nec A B C trianguli.

3) XVI.

*Prop. XXVIII. E. Theor.*

14. *Omnis trianguli A B C tres anguli simul sumti minores esse nequeunt duobus rectis simul sumtis.*

Ponatur, si fieri potest, trianguli A B C angulorum summa angulo Z minor quam duo recti anguli, ita ut anguli A B C $+$ B A C $+$ A C B $=$ 2. R $-$ Z, et sit A B C angulorum eorum maximus. Transformetur triangulum A B C in aliud A B D eadem angulorum summa præditum, cujus vero alter angulus D $<$ ½ R[1]); producantur porro latera D A, D B indefinite,

1) XXVIII. C. Cor.

accipiantur A H = A D, H K = H D, et excitatis perpendiculis A G, H I agantur H G, K I.

Quoniam angulus E D F $<$ ½ R, pertingent in altera rectarum D E excitatæ perpendiculares A G, H I ad alteram D F[2]), ita ut rectæ H G, K I duci possunt. Erunt jam triangula A D G et A H G, itemque H D I et H K I æqualia[3]), ideoque anguli D H G, D K I ipsi D æquales, ideoque $<$ ½ R. Quia porro angulus A B C ponitur trianguli A B C maximus, erit angulus B A C $<$ R, adeoque, a potiori, D A B $<$ R; cadunt itaque perpendicula A G, H I in angulos externos H A B, K H G triangulorum A B D, H G D.

Quod si jam ponatur A B C trianguli angulorum summa = 2. R — Z, erit etiam A B D trianguli angulorum summa = 2. R — Z. In triangulo A B G anguli simul sumti non possunt excedere 2. R[4]); ergo summa angulorum in ambobus triangulis A B D, A B G simul sumtis ad summum æqualis est 4. R — Z, et si auferentur anguli A B D + A B G = 2. R, erit summa angulorum in triangulo A D G ad summum 2. R — Z. Huic vero triangulo est triangulum A H G æquale; ergo in ambobus triangulis A D G, A H G anguli simul efficiunt ad summum 4. R — 2 Z, et ablata summa angulorum rectorum D A G + H A G, erit summa angulo-

2) XXVIII. B.
3) IV.
4) XXVIII. D.

rum in triangulo D H G ad summum = 2. R — 2. Z.

In triangulo H G I angulorum summa ad summum æqualis est 2. R [5]); ergo anguli in utroque triangulo D H G, H G I simul sumti sunt ad summum = 4. R — 2. Z, ideoque, ab lato summa angulorum H G D + H G I = 2 R, erit D H I trianguli angulorum summa ad summum = 2 R — 2 Z, et quia triangula D H I, K H I equalia sunt [6]), erit in iisdem angulorum summa ad summum = 4 R — 4 Z, et ablatis duobus rectis D H I, K H I, erit D K I trianguli angulorum summa ad summum = 2. R — 4. Z.

5) XXXVIII. D.

(6 IV.

Iterata jam in infinitum dictata constructione pervenitur ad triangula communem angulum D habentia, in quibus angulorum summa angulis 2. R — 8. Z, 2. R — 16. Z, 2. R — 32. Z etc. ad summum æqualis est. In horum et præcedentinm terminorum serie id quod a 2. R aufertur seriem constituit Z, 2. Z, 4. Z, 8. Z, 16. Z, 32. Z etc. in qua quilibet terminus præcendentis duplum est; quantumvis igitur parvus sit angulus Z, perveniri tandem poterit ad terminum, qui omnem datam quantitatem excedit. [7]) Ablatum a 2. R poterit adeo excedere differentiam inter 2. R et D, ita ut pro summa omnium angulorum in eo triangulo angulus relinquatur, qui minor est unico angulo D ejus-

7) Ax. XII. A.

dem trianguli, quod effet absurdum. Et quum summæ 2. R — 2. Z, 2. R — 4. Z, 2. R — 8. Z etc. summas angulorum in triangulis D H G, D K I etc. forsan superent, sequitur eo citius obtineri triangulum in quo angulorum summa unico angulo D minor foret. Non potest ergo assumi trianguli A B D, adeoque nec trianguli A B C, angulorum summa $<$ 2. R.

*Prop. XXVIII. F. Theor.*

*Cujus cunque trianguli tres anguli simul sumti æquales sunt duobus angulis rectis simul sumtis.*

Nequeunt enim majores esse duobus rectis, [1]) neque minores, [2]) sunt ergo æquales.

1) XXVIII. D.
2) XXVIII. E.

*Corollarium 1.*

In omni triangulo altero latere producto, externus qui formatur angulus æqualis est duobus internis et oppositis simul sumtis.

*Corollarium 2.*

In omni triangulo rectangulo bini anguli acuti simul sumti æquantur angulo recto.

*Corollarium. 3.*

In omni figura quadrilatera summa omnium angulorum æqualis est quatuor angulis rectis simul sumtis.

Potest enim quadrilaterum ducta diagonali in duo triangula resolvi, quorum in unoquoque anguli simul sumti efficiunt duos rectos, ergo in ambobus triangulis simul sumti anguli quatuor rectis æquales sunt.

*Prop. XXVIII. G. Theor.* 15.

*Si recta linea* A B *habeat bina puncta* C, D, *quæ ab alia recta* E F *æqualiter distant, illa huic parallela et æquidistans erit.*

E punctis C et D demittantur perpendicula C G, D H, quæ ergo, per hypothesin, æqualia sunt. Agantur dein rectæ C H, G D, et tandem e puncto altero quolibet I rectæ A B demittatur itidem perpendicularis recta I K, et ducatur H I.

Triangula C G H, D H G habent duo latera æqualia cum angulo intercepto, æquantur ergo et reliqua latera C H, D G [1]); in triangulis itaque D C G, C D H tria latera respective æquantur, habeant adeo et angulos D C G, C D H aequales [2]). In Quadrilatero G C D H omnes anguli simul sumti $= 4$ R [3]), ergo quum, per constructionem C G H $+$ D H G $= 2$ R, erunt etiam D C G $+$ C D H $= 2$ R, et quum D C G $=$ C D H, erit uterque $=$ R. Incidit ergo in rectas A B, E F recta C G efficiens internos, et ad eandem partem, angulos C G H $+$ D C G $= 2$ R erit ergo A C ipsi C D parallela [4]).

Quum porro angulus C D H $=$ R, erit etiam ipsi deinceps positus I D H $=$ R, ideoque quum in quadrilatero D K tres anguli recti sunt, erit item quartus D I K $=$ R. Qui dein in triangulo rectangulo I D H, anguli D H I $+$ D I H $=$ R [5]), itemque H I K $+$ D I H $=$ D I K $=$ R, erit ang. D H I $=$ H I K, est vero et I D H $=$ H K I:

1) IV.
2) VIII.
3) XXVIII. F. Cor. 3.
4) XVIII.
5) XXVIII. F. Cor. 2.

habebunt ergo triangula I D H, H K I latus H I commune et angulos duos respective æquales, ergo et latera D H, I K æqualibus angulis opposita, itidem æquantur[6]. Distat ergo punctum I a recta E F tantundem, quantum ab eadem distant puncta C, D; quod de omni alio rectæ A B puncto demonstrari posset. Est ergo A B ipsi E F æquidistans.

6) XXVI.

16. *Prop. XXVIII. H. Theor.*

*In duas rectas lineas A B, C D si tertia incidat ita ut angulos alternos H E F, G F E æquales effecerit: æquidistans erit A B ipsi C D.*

Demittantur e punctis E, F perpendicula E G ad rectam C D, et F H ad rectam A B.

Quum triangula E G F, F H E habent latus commune, et duos angulos æquales respective, æquabuntur etiam E G, F H itemque anguli G E F, E F H[1]). Porro quum anguli in quadrilatero G H simul sumti $= 4$ R, et E G F $+$ F H E $=$ 2 R, erunt G E H $+$ H F G $= 2$ R, ideoque G E H $=$ H F G $=$ R. Perpendiculum ergo ex F in rectam A B demissum itidem est ad C D rectam perpendicularis. Habet ergo recta A B bina puncta E, H, quæ a recta C D æqualiter distant, ergo tota recta A B infinita ipsi C D est æquidistans[2]).

1) XXVI.

2) XXVIII. G.

*Prop. XXVIII. J. Theor.*

17. *Linea A B rectæ lineæ C D æquidistans est linea recta.*

Sit linea A B non recta, et dimittatur e tribus ejus punctis E, F, G ad rectam C D perpendiculares E H, F I, G K, et producatur G K indefinite.

Per trium punctorum bina quæcunque F, F ducatur recta E F L, quæ ergo a curva A B deflectet, ipsi autem C D æquidistans et parallela erit [1]). Et quoniam E F ipsi C D est parallela, recta K G, quæ perpendicularis est ad C D, ipsam E F alicubi in L attinget [2]); et quum E F L ipsi C D æquidistans est, erit L K = E H, est autem et G K = E H, ergo L K = G K, quod fieri nequit.

1) XXVIII. G.

2) Ax. XI.

*Prop. XXVIII. K. Theor.*

18.

*Si recta C D rectæ A B est æquidistans: (I.) perpendicularis F E a quovis rectæ prioris C D puncto ad alteram A B demissa, etiam ad illam C D erit perpendicularis; (II.) recta item A B priori C D erit æquidistans; (III.) recta porro quæcunque K I ambas illas rectas secans, angulos alternos L I K, D K I æquales inter se efficiet.*

(I.) Demittatur aliud quodcunque perpendiculum H G, et agantur rectæ F G, E H. Triangula F F G, H G E habent bina latera respective æqualia cum angulo intercepto, ergo et tertia latera F G, H E æquabuntur; triangula itaque E F H, G H F habent tria latera respective æqualia, ergo æquantur anguli E F H, G H F; et qu-

um anguli F E G + E G H + G H F + E F H = 4. R [1]), erit E F H = G H F = R. Est itaque E F ad C D normalis.

1) XXVIII. F. Cor. 3.

(II.) Quum æquales rectæ E F, G H ad C D perpendiculares modo demonstratæ sunt, erit etiam A B ipsi C D æquidistans [2]).

2) XXVIII. G.

(III.) Demissa K L ad A B normali, erit etiam K L normalis ad C D, per modo demonstrata, ergo D K I + L K I = R; est vero etiam L I K + L K I = R [3]), adeoque D K I = L I K.

3) XXVIII. F. Cor. 2.

*Corollarium.*

Si in duas rectas incidat tertia, ita ut alternatim ad partes internas angulos æquales effecerit: erit quæcunque recta ad primam perpendicularis etiam ad secundam normalis; quævis item alia recta primam et secundam secans alternos angulos æquales pari modo efficiet.

Ex hypothesi enim sequitur rectarum illarum æquidistantia [1]), qua stabilita assertorum patet ex hac ipsa propositione veritas.

1) XXVIII. H.

*Prop. XXVIII. L. Theor.*

19. *Si binæ rectæ A B, A C efficiunt angulum semirecto minorem, et in altera A B perpendicula D E, F G usque ad alteram rectam A C excitata sunt, ita quidem ut alterum F G duplo magis a puncto A distat, quam alterum D E: erit etiam F G perpendiculum duplo majus perpendiculo D E.*

Perpendicula primo D E, F G necessario ad rectam A C pertingent[1]). Ducta itaque E F bisecatur angulus F E G recta E H. Jam in triangulis A D E, F D E æquantur respective bina latera cum angulo intercepto, æquabuntur ergo et tertia latera A E, F E, itemque anguli D A E, D F E. Trianguli porro A E F exterior angulus F E G = D A E + D F E, ergo D F E = $\frac{1}{2}$ F E G; per constructionem autem est F E H = $\frac{1}{2}$ F E G, ergo D F E = F E H, et E D = F H[2]), et E H F = R[3]). Habent ergo triangula E H F, E H G latus E H commune, ipsique adjacentes angulos respective æquales, ergo etiam F H = G H[4]) ideoque F G = 2. F H; vidimus vero C D = F H, ergo etiam F G = 2. E D.

1) XXVIII. B.
2) XXVIII. H.
3) XXVIII. K. Cor.
4) XXVI.

*Prop. XXVIII. M. Theor.*

*Si in duas rectas A B, C D tertia A C incidens angulos internos et ad easdem partes, C A B, A C D, simul sumtos minores efficiat, quam duos rectos simul sumtos: eæ rectæ ad eas partes convenient.*

20, 21.

Eorum angulorum summa potest esse: aut minor recto, aut major recto, minor vero sesqui recto, aut tandem major sesqui recto, minor vero duobus rectis.

In primo casu rectarum convenientia jam demonstrata est[1]).

1) XXVIII. A.

In secundo casu: quum C A B + A C D $<$ R + $\frac{1}{2}$ R, erit A C D $<$ $\frac{1}{2}$ R + $\frac{1}{4}$ R, si C A B

20.

$>$ A C D, ergo minor angulus A C D semper est acutus: demissa igitur ex majori angulo A C D ad rectam C D perpendicularis A E intra angulum acutum cadet [2]). Est igitur trianguli A C E externus angulus A E D $=$ A C E $+$ C A E [3]), et addito communi E A B, erit: A E D $+$ E A B $=$ A C D $+$ C A B, est autem A C D $+$ C A B $<$ R $+$ $1/2$ R, ideoque A E D $+$ E A B $<$ R $+$ $1/2$ R, et ablato utrinque A E D $=$ R, E A B $<$ $1/2$ R, coïncidet ergo E D perpendicularis ad A E, satis producta, cum recta A B [4]).

2) XVII. Cor. 4.
3) XXVIII. F. Cor. 1.
4) XXVIII. B.

21. Efficiant, in tertia casu, rectæ A B, C D cum tertia angulos B A C $+$ A C D $<$ 2 R, sed simul sit B A C $+$ A C D $>$ R $+$ $1/2$ R. Fiat angulus A C E $=$ C A B, et producatur E C in F, accepta porro C G ad libitum, fiat G H $=$ C G, H I $=$ C H, I K $=$ C I, et sic porro, et in punctis G, H, I, K etc. excitentur perpendiculares rectæ G L, H M, I N, K O etc., tandem demittatur perpendiculum A S.

Quia jam anguli alterni B A C, E C A æquales sunt, erunt rectæ A B, E F parallelæ et aequidistantes [5]). Dein quia anguli B A C $+$ A C D $>$ R $+$ $1/2$ R, et B A C $+$ A C F $=$ 2 R, erit: A C F $-$ A C D $=$ F C D $<$ $1/2$ R; ergo perpendicula G L, H M, I N, K O etc. in E F excitata satisque producta ad rectam C D pertingent [6]). Quoniam porro C H $=$ 2 C G, C I $=$ 2 C H, C K $=$ 2 C I etc., erit etiam H M $=$ 2 G L, I N $=$ 2 H M,

5) XXVII. XXVIII. H.
6) XXVIII. B.

K O = 2 I N, et sic porro [7]); perpendicula igitur G L, H M, I N etc., semper duplicantur, perveniri ergo tandem potest ad perpendiculum K O, quod datam rectam A S excedat [8]). Perpendicularis vero K O etiam ad rectam A B, ipsi E F parallelam, alicubi in P pertinget [9]); et quia A B ipsi E F est æquidistans, erit etiam K P = A S, adeoque quum K O > A S, erit etiam K O > K P. Cadit ergo punctum O rectæ C D ab altera parte rectæ A B, habet itaque hæcce recta C D puncta C et O ad diversas rectæ A B partes, ergo C D ipsam A B secabit. [10]).

7) XXVIII. I.

8) Ax. XII. A Cor.

9) Ax. XI.

10. Ax. X. A.

In omni ergo casu si anguli B A C + D C A < 2 R, rectæ ad eam partem convenient, qua anguli illi constituti sunt.

*Scholium.*

Hæc propositio est *Euclidis* axioma XI. in theorema conversum.

*Prop. XXIX. Theor.*

22.

*In parallelas rectas lineas A B, C D incidens recta E H; et alternatim angulos B F G, C G F inter se æquales, et exteriorem E F A interiori et opposito et ad easdem partes C G F æqualem, et interiores et ad easdem partes B F G, D G F duobus rectis æquales efficiet.*

Si inæquales sunt anguli alterni B F G, C G F unus ipsorum major est; sit C G F > B F G, adjecto communi D G F, erit C G F + D G F > B F G +

D G F, sunt autem C G F + D G F = 2R, ergo B F G + D G F < 2R, convenient ergo rectæ A B, C D in infinitum productæ [1]), quod est contra hypothesin. Non ergo C G F > B F G, et simili modo demonstratur: neque C G F < B F G ergo necessario B F G = C G F.

1) XXVIII. M.

Est vero ipsi B F G etiam A F E æqualis, æquantur adeo et A F E, C G F.

Tandem, quum B F G = C G F, addito communi D G F, erit: B F G + D G F = C G F + D G F = 2 R.

*Prop. XXIX. A. Theor.*

22. *Recta A B alteri C D parallela eidem quoque æquidistans est.*

Ducatur quæcunque recta E H, utramque rectam A B, C D secans; erunt anguli alterni B F G, C G F inter se æquales [1]), et ex ista æqualitate sequitur rectarum A B, C D æquidistantia [2]).

1) XXIX.

2) XXVIII. H.

*Prop. XXX. Theor.*

*Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ rectæ, et inter se sunt parallelæ.*

*Coroll. 1.*

Quæ eidem rectæ lineæ sunt æquidistantes rectæ, et inter se sunt æquidistantes et parallelæ.

*Coroll. 2.*

Si binarum rectarum altera tertiæ est paralela, altera eidem æquidistans: erunt ambæ inter se æquidistantes et parallelæ.

*Prop. XXXI. Probl.*

*Per datum punctum datæ rectæ parallelam rectam lineam ducere.*

*Coroll.* 1.

Per datum punctum datæ rectæ lineæ æquidistantem rectam lineam ducere.

*Coroll.* 2.

Datæ rectæ lineæ in data distantia parallelam, aut æquidistantem, rectam lineam ducere.

---

## SCHOLIUM GENERALE.

Absoluta sic expositione novæ hujus theoriæ visum est in hoc scholio quædam addere, quibus ut minus necessariis nolui seriem propositionum interrumpere.

I.

Propositiones duæ extremæ XXX et XXXI una cum corollariis additæ sunt ad complendam theoriam rectarum parallelarum et æquidistantium, omissæ vero sunt earundem demonstrationes, quæ nullo negotio reperiri possunt. Sic etiam supra prolatæ propositiones XXVIII. J. et XXVIII. K. ad demonstrationem præcipuarum systematis nostri veritatum nihil faciunt, et solummodo adjectæ sunt ad complendam se-

riem et significandum ordinem propositionum circa theoriam linearum parallelarum, et æquidistantium.

II.

In propositionis XXVIII. C. partem primam, transformationem cujuslibet trianguli in infinita alia eandem angulorum summam habentia docentem, jam ante 32 annos incidi, quum iterata *Euclidis* Elementorum lectione occupatus, propositionem XVI. libri I. propius perpenderem. Juvenili vero levitate abreptus, hoc theorema festinantius, quam par erat, ad demonstrationem *Euclideæ* propositionis XXXII. adhibui, eamque thesibus mathematicis inserui eodem anno (1790.) in lucem editis. Parvo tamen interjecto tempore rigorem geometricum in ea demonstratione ultro desiderare cœperam.

III.

14. In demonstrando theoremate XXVIII. E. unica opus est operatione in propositione XXVIII. C. dictata, ut in transformatione trianguli A B C perveniatur ad aliud A B D, in quo angulus D $< \frac{1}{2}$ R. Si enim in triangulo A B C angulus A B C est maximus, erit C A B $<$ R, itemque latus A C $>$ A B; est vero B D $=$ A C, ergo et B D $>$ A B, adeoque in triangulo A B D angulus D A B $>$ A D B. Angulus autem A D B $=$ C A D, ergo D A B $>$ C A D, est igitur C A D $< \frac{1}{2}$ C A B,

ergo et D $< \frac{1}{2}$ CAB, et quum CAB $<$ R, a potiori: D $< \frac{1}{2}$ R.

IV.

Demonstratio ceterum hujus propositionis XXVIII. E. fere convenit cum demonstratione, quam de eodem hoc theoremate ediderat celeberrimus *Le Gendre* (Elem. de Geom. $4^{me}$ Edit. Paris 1802. p. 20 seq.); et ingenue fateor, quod forsan sine eo theoremate nunquam in propriam propositionem incidissem. Laborat tamen celeberrimi viri theorema, ut ipse probe perspexerat, defectu quodam, quem ut supplerem sæpe multa, sed frustra, tentaveram. Ante septennium vero, quum alterius oculi inflammatione vexarer, et per aliquot dies legendi scribendiqne vacationem flagitarent dolores et suaderet valetudinis recuperandæ desiderium: triste tempus contemplationibus absumere geometricis, imaginationis adminiculo expediendis, opportunum ratus, inter alia, multa de parallelarum rectarum theoria meditabar, quo tandem fiebat, ut in methodum inciderem, qua theorema *Legendreanum* demonstrari posset; substituto scilicet in locum *Euclideani* axiomatis XI. alio longe evidentiore, nec a quoquam non concedendo.

V.

Posset equidem idem hoc novum axioma in theorema converti, quod demonstrationem

*

admittat, si alia propositio pro axiomate accipiatur, scilicet:

23. *Datis duobus quibuscunque rectis parallelis* A B, C D, *si in altera* C D *detur punctum quodcunque* E: *possunt ex altera* A B *perpendicula* F G, H I *demitti, quæ ad utramque partem puncti* E *cadant.*

Posito enim hoc axiomate facile sequitur perpendiculum E K in E excitatum, et satis productum, rectam A B alicubi secare. Nam recta E K, habens sui partem intra figuræ quadrilateræ F G I H ambitum, exibit ex eadem.[1] Non autem posset exire per latera F G, I H, quia triangula existerent binorum rectorum angulorum, quod fieri nequit; ergo necessario E K exibit per latus H F, et secabit adeo rectam A B.

1). Ax. X. A.

Quod si autem hoc axioma cum nostro XI conferatur, neque evidentius invenitur, neque majori vi intellectum ad assensum excitans; malui ergo hoc XI, idemque simplicius, novæ theoriæ pro fundamento substernere.

VI.

Demonstratio propositionis XXVIII. M. sive XI. *Euclideani* axiomatis, præeunte cel. *Le Gendre*, breviori ratione, quam ea, qua usus sum, concinnari potest; opus tamen est ut præmittatur lemma, quod fere cum propositione prima libri X. *Euclidis* convenit.

*Datis duabus magnitudinibus inæqualibus,*

*si a majori auferatur dimidium, et ab eo quod reliquum est, rursus auferatur dimidium, et hoc semper fiat: relinquetur tandem quaedam magnitudo, quae minori magnitudine proposita minor est.*

Potest propositio haecce pari plane modo demonstrari, qua usus est *Euclides*, eaque posita, omissis propositionibus XXVIII. G. H. J. K. L. a theoremate XXVIII. F. statim ad XXVIII. M. transitus conceditur; et quidem hac ratione.

24\. *Si in duas rectas lineas A B, C D tertia C A incidens angulos internos et ad easdem partes C H B, H C D, simul sumtos, minores efficiet duobus rectis: eae rectae ad eas partes convenient.*

Fiat angulus H C G = A H C, erit C G ipsi A B parallela, et C H B + H C G = 2 R, ideoque recta C D intra angulum H C G cadet. Accepta deinde H I = H C, I K = C I, K L = C K, et sic porro: erit H C I = H I C [1]), et A H C = H C I + H I C, ergo: H C I = A I C = ½ A H C = ½ H C G. Simili modo demonstratur I C K = I K C = ½ I C G, K C L = C L K = ½ K C G et sic porro. In serie itaque angulorum H C G, I C G, K C G, etc. aufertur a primo dimidium, a reliquo iterum dimidium, et sic porro; erit igitur, continuata serie aliquando angulus K C G, in quo angulus L C G qui reliquus manet ab angulo H C G, minor est quam angulus D C G,

1) XXVIII. F. Cor. 1.

per lemma præmissum. Cadet ergo recta C D intra angulum K C L trianguli K C L, secabit ergo, satis producta, latus K L [1]). Secabit ergo C D, satis producta rectam A B.

1) IX A.

Duas præsertim ob rationes hunc demonstrationis modum licet elegantem, non secutus sum. Primo enim principia quam paucissima adhibere satius duxi, eo magis, quum lemma adhibitum, quasi e longinquo ad limen geometriæ translatum sit, aptius vero posterioribus doctrinæ capitibus reservandum videtur, ut theorematibus inserviat quibus demonstrandis methodus exhaustionis necessario adhibenda est. Altera ratio est, quod non a scopo alienum videbatur, completam et linearum rectarum parallelarum, et æquidistantium, theoriam proponere, ut pateat quomodo utrarumque linearum affectiones a se invicem et ab aliis principiis necessariis pendeant; quæ vero copiosior tractatio juxta quoque illius theorematis demonstrationi inserviebat.

VII.

Cæterum si cui magis placuerit nova ista demonstrationis ratio, quam ea quæ supra exhibita est, poterit etiam ex eodem lemmate concinnori modo tertiam partem propositionis XXVIII. C. evincere.

Sequitur enim primum ex lemmate corollarium: *quod scilicet eo citius perveniri pos-*

*sit ad quantitatem minori data minorem: si a majori plus auferatur quam dimidium, et a reliquo iterum plus quam dimidium, et sic porro.* Quod corollarium ipsa propositio est, quam primam libri X. posuit *Euclides.*

12. Quoniam deiu, ob angulum A B C > A C B, erit etiam latus A C > A B [1]); est vero B F = A C, ergo in triangulo A B F latus B F > A B, ideoque et angulus B A F > F [2]), et B A F > C A F. Simili plane modo demonstratur B A H > H, i. e. B A H > F A H, itemque B A K > K, i. e. B A K > H A K, et sic porro in infinitnm. Aufertur itaque a dato angulo B A C plus quam dimidium, et sic porro: poterit ergo tandem perveniri ad reliquum H A I, sive K, qui minor est angulo dato X.

1) XIX.

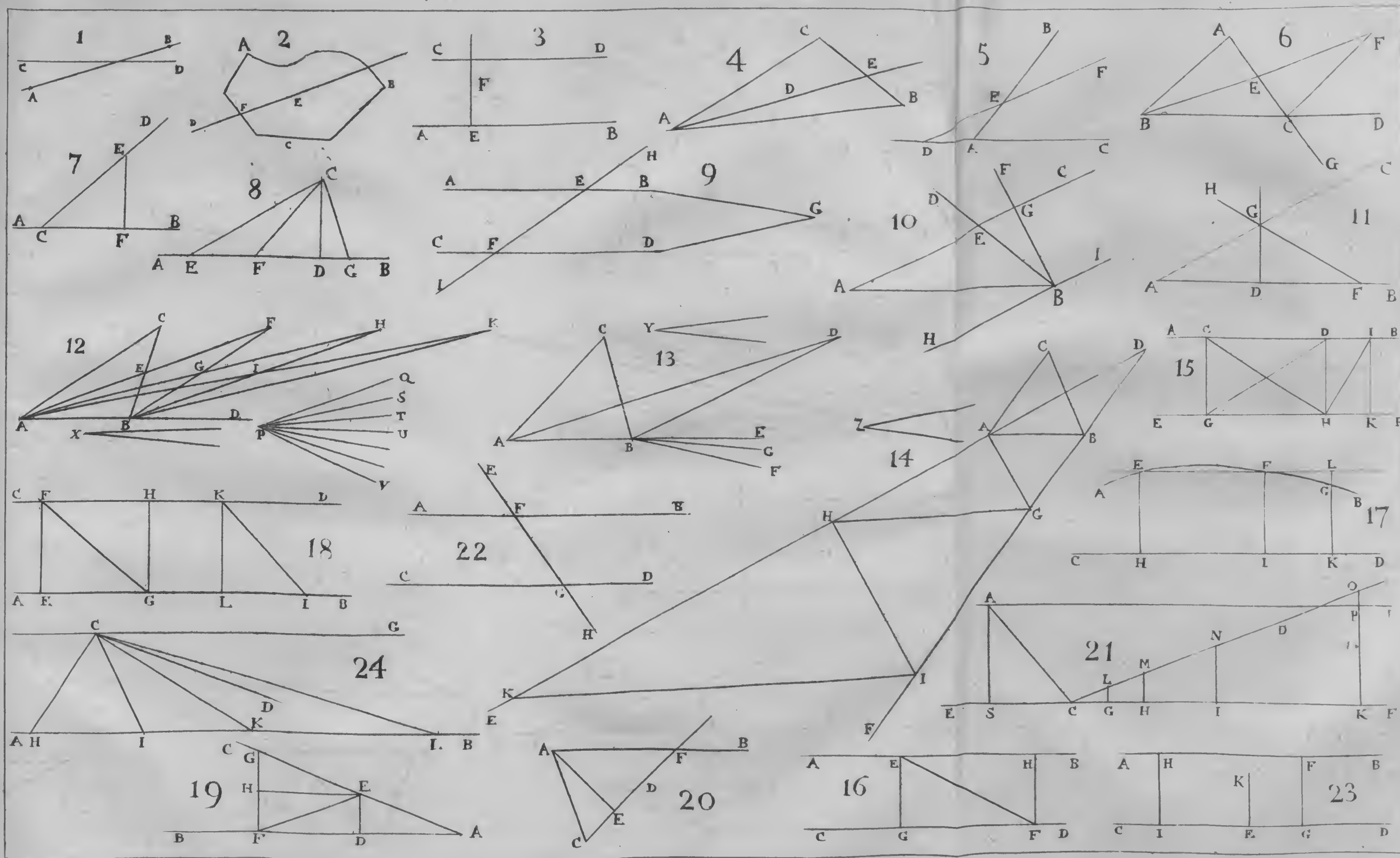
2) XVIII.

VIII.

Nemini tandem auctor esse vellem hanc theoriam in geometriæ elementa recipere, quæ primæ juvenum institutioni dicata sunt. Proposui theoriam istam ut defectus suppleatur in scientifico eoque rigoroso geometricarum veritatum systemate; ejusmodi vero systema multum differre potest a primis elementis juvenibus tradendis, in quibus tantus demonstrationum rigor, tamque stricta propositionum compages, non requiruntur sed potius vitandæ sunt ne tædium pariant. Satis mihi videtur, si in primis elementis *Euclideanum* axioma XI. alia forma proponatur scilicet:

*Data recta linea, datoque extra illam puncto quocunque, poterit per illud unica recta duci, quæ datæ parallela sit.*

Confundit quidem axioma istud, si propius consideratur, ideas æquidistantiæ et non-coïncidentiæ, simulque rectæ æquidistantem lineam supponit rectam esse; nihilo minus tamen mens eidem aliquo modo acquiescit, necfacile ultra quærit aliud, e quo derivet illius veritatem. Hanc certe methodum in tradendis geometriæ elementis, optato cum successu jam ultra 25 annos adhibeo; neque multum abest, quin mihi persuadeam: nunquam tantas difficultates theoriæ parallelarum per 18 et ultra sæcula motas fuisse, si *Euclides* axioma suum hac forma proposuisset.



*Q. D. B. V.*

SPECIMEN

# THESIUM MATHEMATICARUM

QUOD

EX DECRETO

*AMPLISSIMI SENATUS ACADEMICI*

VACANTE SEDE MATHEMATICA

CLARISS. VV. COMPETITORUM

*INGENUO SUBJICIT EXAMINI*


*DANIEL HUBER*, *A. L. M.*


ARGUMENTA EXCIPIENTE DOCTISS. JUVENE

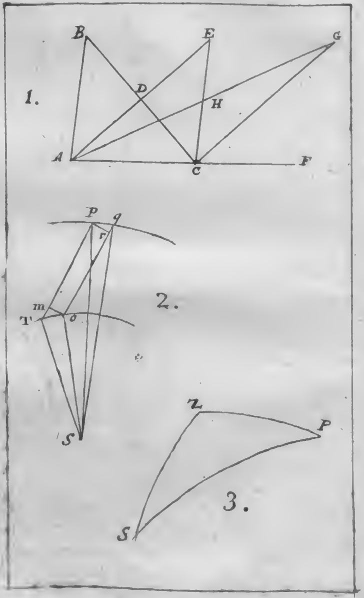
CHRISTOPH. GENGENBACH, *Phil. Laur.*

AD DIEM XVI NOVEMBRIS MDCCXC.

H. L. Q. S.


BASILEAE

Typis JOANNIS SCHWEIGHAUSER.


B
E
G
1.
D
H
A
C
F
P
q
r
2.
m
T
o
S
Z
P
3.
S

# I.

Ad veritatem quamlibet cognoscendam quamvis unica sufficiat via, tamen plures, quae eo ducunt, nosse jucundum est. Sic Parallelarum Linearum proprietatibus demonstrabatur hactenus notissima illa propositio Euclidis (Elem. Lib. I. 32.), *quod in omni triangulo, trium angulorum summa aequalis sit duobus angulis rectis simul sumtis.* Ejus autem theorematis alia demonstratio, aliis nixa fundamentis, sic concinnari potest.

Sit Triangulum qualecunque ABC: (Fig. 1.) secetur Latus quodcunque BC bifariam in D, atque ex angulo A, lateri BC opposito, ducatur recta AD, in qua producta capiatur DE = AD, atque tandem ducatur CE. Jam quia, per constructionem, latera BD, DA, aequantur lateribus CD, DE, itemque angulus BDA aequatur ad verticem opposito CDE, erit (per 4 Lib. I. Elem.) Triangulum ADB aequale

Triangulo EDC; ideoque et angulis ABD, BAD aequabuntur anguli DCE, CED, homologis oppositi lateribus. Erit itaque etiam ABD + BAD = DCE + CED, et si utrique summae addes DAC + ACB, prodibit CBA + BAD + DAC + ACB = ECD + DCA + CAD + DEC, h. e. summa angulorum in Triangulo ABC aequalis erit summae angulorum in Triangulo ACE. Si jam in Triangulo ACE iterum dividas Latus CE in duas partes aequales puncto H, et in producta recta AH capias HG = AH, jungasque CG, simili modo demonstrari potest, summam angulorum in Triangulo AGC aequari summae angulorum in Triangulo AEC, adeoque etiam summae angulorum Trianguli ABC. Eaque operatione in infinitum iterata, orietur infinita Triangulorum series, in quorum quolibet seorsim spectato summa angulorum aequalis erit summae angulorum in singulis reliquis. Cumque his operationibus continuo augeatur Triangulorum angulus ad C, qui respondet angulo ACG, et minuatur externus, qui respondet angulo GCF, hic omni dato minor tandem evadat necesse est, h. e. infinities repetita operatione, latus quod respondet lateri CG coïncidet tandem cum producta AC. Et quia semper crescit in ista Triangulorum serie angulus internus ad C, summa angulorum in quolibet ex dictis Triangulis manente eâdem, is angulus ad C solus, semper magis magisque appropinquet summae angulorum in Triangulo, cui respondet, ergo etiam summae angulorum in singulis reliquis. Et ei summae aequalis erit, si anguli duo reliqui (ad A, et qui respondet angulo G) evanuerint, id quod fiet, quando latus respondens lateri CG cum latere AC producto coïncidet (quod ultimo eventurum diximus), et tum erit angulus ad C aequalis duobus rectis, quia in directum jacente AC cum CG, super puncto C duo anguli recti constitui possunt. Hinc tandem, is ipse angulus ad C, quia tum aequalis est duobus rectis, simulque summae angulorum in quolibet seriei Triangulo, erit summa angulorum in quolibet seriei Triangulo aequalis duobus rectis, ergo etiam *summa angulorum in Triangulo ABC erit aequalis duobus angulis rectis simul sumptis.* Q. E. D.

## II.

Si Corpus per plana contigua *utcunque* inclinata descendat, directionem per flexus mutatam non mutare velocitatem supponunt *Galilei*, *Hugenius*, eumque secutus *Rog. Cotes*, item *Keilius*, *Wolfius* et *Musschenbroekius* Quod autem si concederetur, accipiamus etiam necesse esset, corpus motum a duabus viribus directione diversis, quae sunt inter se ut latera parallelogrammi, non solum in intermedia, Diagonalis scilicet, directione, spatium huic proportionale percurrere, sed spatium, quod est in ratione summae laterum parallelogrammi, id quod rationi utique adversatur. Verius restingitur ea suppositio ad Plana inclinata, quorum inclinationes non nisi quantitate infinitesima differunt. Sic fecerunt *Newtoni* Commentatores *Le Seur* et *Jacquier*. Optime quoque hanc materiam tractavit *D'Alembertus* in *Traité de Dynamique*.

## III.

PROBLEMA. Invenire Elongationem planetae cujuscunque à Sole, tempore Stationis, si orbitae planetae & Terrae circulares supponuntur et concentricae.

Sit (Fig. 2.) S locus Solis, T Terrae, P planetae, sint porro To, Pq arcus, tempore eodem infinite parvo, descripti. Quoniam tempora periodica sunt in ratione sesquiplicata radiorum TS, PS, erunt velocitates, seu spatia eodem tempore descripta, reciproce in eorundem radiorum ratione subduplicata, ideoque $\sqrt{(PS)} : \sqrt{(TS)} = To : Pq$. Jam videbitur Planeta stationarius esse, si radii visionis TP, oq sunt paralleli, h. e. si demissae perpendiculares Pr et om sunt aequales, sive si $To \,\textit{sin.}\, mTo = Pq \,\textit{sin.}\, Pqr$. Quia angulus STo est rectus, erit angulus elongationis $PTS = mTo + 90°$; hinc $\textit{sin.}\, mTo = \textit{cos.}\, PTS$: porro quia PqS item est rectus, et ob infinite parvum PSq, $TPS = rqS$, erit $Pqr = 90° - TPS$, hinc $\textit{sin.}\, Pqr = \textit{cos.}\, TPS$. His valoribus

substitutis in aequatione To *sin.* m To $=$ Pq. *sin.* Pqr; erit To *cos.* PTS $=$ Pq. *cos.* TPS : sive *cos.* TPS : *cos.* PTS $=$ To : Pq ; hinc porro comparata hac analogia cum priori illa $\sqrt{(PS)} : \sqrt{(TS)} =$ To : Pq, erit *cos.* TPS : *cos.* PTS $= \sqrt{(PS)} : \sqrt{(TS)}$ : sive $\sqrt{(PS)}$ *cos.* PTS $= \sqrt{(TS)}$ *cos.* TPS. Vocetur jam TS $= a$, PS $= b$, et sinus Elongationis PTS $= z$; erit, quia in Triangulo TPS sinus sunt in ratione laterum oppositorum, *sin.* TPS $= \frac{az}{b}$; eruntque ideo *cos.* PTS $= \sqrt{(1 - zz)}$, et

$$cos. \text{ TPS} = \sqrt{\left(1 - \frac{aazz}{bb}\right)}.$$

Aequatio $\sqrt{(PS)}$. *cos.* PTS $= \sqrt{(TS)}$. *cos.* TPS igitur eadem est cum isthac $\sqrt{b}. \sqrt{(1 - zz)} = \sqrt{a}. \sqrt{\left(1 - \frac{aazz}{bb}\right)}$, in qua unica quantitas $z$ incognita est, h. e. sinus Elongationis. Si, sumtis utrobique quadratis, multiplicetur per $bb$, erit $b^3 - b^3 zz = abb - a^3 zz$, ideoque $zz = \frac{b^3 - abb}{b^3 - a^3}$. Si jam vocetur Tangens anguli PTS $= y$, erit

$$zz = \frac{yy}{yy + 1} = \frac{b^3 - abb}{b^3 - a^3},$$

proinde $b^3 yy - a^3 yy = b^3 yy - abbyy + b^3 - abb$; hinc tandem

$$yy = \frac{b^3 - abb}{abb - a^3} = \frac{bb(b - a)}{a(bb - aa)} = \frac{bb}{a(b + a)},$$

sive, si radius orbitae terrestris $a$ ponatur $= 1$, erit

$$yy = \frac{bb}{b + 1}, \text{ et } y = \frac{b}{\sqrt{(b + 1)}}.$$

Haec eadem est formula, quam Celeb. *De la Lande* a Celeb. *Lexell* acceptam, omissa tamen demonstratione, profert in *Mémoires de l'Acad. roy. d. Sc. de Paris* 1779.

# IV.

*Praecessionem Aequinoctiorum*, ex collatis *Flamstedii* et *Lacaillii* observationibus stellarum fixarum, ab anno 1690. ad annum usque 1750, 50′, 17″,1 deprehendit Celeb. *De la Lande*, (*Mém. de l'Acad. roy. d. Sc. de Paris* 1781): ergo annuus motus 50″,285. Hanc annuae Praecessionis quantitatem augendam esse 0″,078 monet Idem, ut ea Praecessio obtineatur, quae a Solis et Lunae viribus in Sphaeroïn terrae oritur. Tantundem enim variatio plani Eclipticae ab attractione planetarum oriunda, Puncta Aequinoctialia in contrariam movet partem. Quum autem Praecessionis a Sole et Luna provenientis quantitas pendeat ab obliquitate Eclipticae, cujus Cosinui est proportionalis (*Newton* Princ. Lib. III. Pr. 39), haecque continuo decreverit, alio tempore aliam fuisse etiam illam necesse est. Quae consideratio, in accuratiori observationum valde remotis a se invicem temporibus factarum comparatione, negligenda non videtur. Ut vero hujus variationis Praecessionis ineamus calculum, notare convenit obliquitatem Eclipticae a *Ptolomaeo* circa annum 137 Aerae Christ. observatam fuisse 23°. $51'\frac{1}{3}$: atque ex recentiorum Astronomorum observationibus eandem anno 1720 (qui est medius inter observationum *Flamstedii* et *Lacaillii* epochas) 23°. $28'\frac{1}{2}$ fuisse colligitur. Est itaque Praecessio a Sole et Luna oriunda, circa annum 1720 observata, ad Ptolomaeanam, ut *Cos.* 23°. $28'\frac{1}{2}$ ad *Cos.* 23°. $51'\frac{1}{3}$, i. e. ut 0, 9172339 ad 0,9145680, hinc cum illa sit 50″,285 + 0″,078 = 50″,363, fuit haec 50″,2166. Crevit ergo ex hoc capite à Ptolomaeo ad annum 1720 usque, 0″,1464; hinc porro annuum incrementum foret 0″,00009248 si uniformiter crescens supponatur. In eadem uniformitatis hypothesi, si $n$ vocetur annorum numerus, qui a dato tempore ad annum 1720 usque effluxerunt, formula $(nn - n)$ 0″,00004624 exprimet summam annuorum incrementorum Praecessionis, i. e. quantitatem, qua diminuendae sunt Longitudines stellarum observatae, si ex earum comparatione Praecessionem determinare volu-

mus, quae nostro competat aevo. Si $n$ fiat 1848, h. e. si formulae valor *Hipparchi* tempore quaeritur, erit is valor $= 2'. 38''$.

## V.

Etsi Tuborum meridionalium Arcuumque muralium, ad observandos siderum per meridianum transitus, tantopere invaluerit usus, nihilominus accidit saepius, ut ad methodum Altitudinum correspondentium recurramus necesse sit. Si hac methodo Culminatio Solis quaeratur, correctionem adhibendam esse ob variationem diurnam Declinationis, intelligebant jam superioris saeculi Astronomi, quum melioris notae usi instrumentis vel parvas quantitates observare potuerunt. Saepe tamen miratus sum, quod, in tanta hodiernae Astronomiae perfectione, similis correctio negligatur, quae et ad Solis et stellarum Culminationes adhibenda esset: eam intelligo, quam variationes Refractionis requirunt, quae, etiamsi sit exigua, in accuratioribus disquisitionibus tamen haud contemnenda est.

Ut vero rationem ineamus, quomodo Refractionis variationes Culminationis tempus per Altitudines correspondentes inventum afficiant; sit (Fig. 3) P. Polus aequatoris, Z verticis punctum et S locus Solis vel stellae, erit PZ Elevatio aequatoris, PS Complementum Declinationis sideris. ZS Complementum Altitudinis, et angulus P angulus horarius. Si itaque ante transitum sideris per Meridianum observetur Altitudo apparens, Refractione $\varrho$ affecta, quae exprimatur per $\alpha$, ita ut altitudo vera sit $\alpha - \varrho$: Sidus post transitum per Meridianum ad eandem altitudinem apparentem perveniret eodem temporis spatio, quo à loco priori ad Meridianum usque pervenit, si Refractio $\varrho$ semper esset constans: et in utraque observatione angulus P idem foret. Si porro vocetur $A$, temporis momentum primae observationis, et $\pi$, angulus horarius P in tempus reductus, esset Culminationis quaesitum momentum $= A + \pi$. Mutato autem calore vel pondere Atmosphaerae, inter primam et secundam observationem,

servationem, etiam quantitas Refractionis mutabitur. Sit ergo in secunda observatione Refractio $= \varrho + \omega$, erit altitudo vera $= \alpha - \varrho - \omega$; Hinc quum in prima observatione fuerit $ZS = 90° - \alpha + \varrho$, et in secunda $= 90° - \alpha + \varrho + \omega$, erit in hac, ZS major quam in priori; adeoque etiam, quia PZ et PS constantes ponuntur, angulus horarius P major erit in secunda observatione quam in prima. Sit ergo in secunda observatione iste angulus $= P + f$, sive in tempus conversus $= \pi + \Phi$, prodiret, ex methodo, Culminationis tempus

$$= A + \frac{2\pi + \Phi}{2} = A + \pi + \tfrac{1}{2}\Phi,$$

quod quantitate $\frac{1}{2}\Phi$ justo tardior est vero Culminationis tempore $A + \pi$. Aucta itaque Refractione diminui debet Culminationis tempus, per altitudines correspondentes inventum; et augeri, si in secunda observatione Refractionem diminutam esse accidit.

Jam vero, ut nobis constet ratio, quae est inter quantitates $\omega$ et $f$, h. e. ut inveniamus qualem variationem in angulo P, producat variatio data in latere opposito ZS: differentiemus aequationem

$$\textit{cos.}\ P = \frac{\textit{cos.}\ ZS - \textit{cos.}\ PS.\ \textit{cos.}\ PZ}{\textit{sin.}\ PS.\ \textit{sin.}\ PZ},$$

quae, relationem inter angulum P et latera in Triangulo sphaerico PZS exprimens, ex trigonometricis demonstratur. Erit ergo

$$\textit{sin.}\ P.\ dP = \frac{\textit{sin.}\ ZS.\ d\,ZS}{\textit{sin.}\ PS.\ \textit{sin.}\ PZ}$$

si PS et PZ ponuntur constantes; adeoque

$$dP = \frac{\textit{sin.}\ ZS}{\textit{sin.}\ P.\ \textit{sin.}\ PS.\ \textit{sin.}\ PZ}\, d\,ZS;$$

Hinc etiam

$$f = \frac{\textit{sin.}\ ZS}{\textit{sin.}\ P.\ \textit{sin.}\ PS.\ \textit{sin.}\ PZ}\, \omega.$$

**

Et quia $\varphi$, sive $f$ in tempus conversum, est $= \frac{1}{15} f$, erit $\frac{1}{2} \varphi$ ( i. e. correctio Culminationis tempori, per methodum invento, adhibenda )

$$= \frac{1}{30} f = \frac{\text{sin. ZS}}{\text{sin. P. sin. PS. sin. PZ}} \cdot \frac{\omega}{30}.$$

Quantitas $\omega$ semper est proportionalis Refractioni $\varrho$. Datam enim aëris mutationem, Refractiones cujusvis Altitudinis, in eadem ratione variare, assumitur. Si itaque dicatur $\frac{1}{x}$, haec pars, qua mutantur Refractiones, exprimi potest $\omega$, per $\frac{\varrho}{x}$; hinc habebimus pro expressione correctionis, tempori Culminationis adhibendae,

$$\frac{\text{sin ZS}}{\text{sin. P. sin. PS. sin PZ}} \cdot \frac{\varrho}{30. x}.$$

Haec formula in tres factores dividatur, scil.,

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{\varrho \text{ sin. ZS}}{30 \text{ sin. P}}, \quad \frac{1}{\text{sin. PS. sin. PZ}}.$$

pro quorum quolibet tabella confici potest, ut correctionis calculus reddatur facilior.

Pro primo factore $\frac{1}{x}$, tabulam primam computavi, in qua, ex data variatione Thermometri et Barometri, inter primam et secundam observationem, quantitas $\frac{1}{x}$ datur. Pro quovis Thermometri Reaumuriani Gradu assumsi Refractiones variari parte 229na. Id in eo solo casu stricte accipiendum est, si Thermometrum circa decimum Caloris gradum versatur ( *Astron. De la Lande* Liv. XII. §. 2241. seqq. ). Frigidiori autem temperatura paullo majori parte, quam 229na, mutantur Refractiones, pro variatione unius gradus Thermometri; et paullo minori, si

calidior sit tempestas. Caloris autem atmosphaerici variationes quum angustioribus inclusae sint limitibus, in hac disquisitione sine sensibili errore assumi potest, quavis Temperatura, pro quovis Thermometri gradu, variari Refractiones parte 229na. Haud absimilis est ratio variationum Refractionis, quae a pondere Atmosphaerae variato pendent. Refractio enim 336ta parte variatur, pro Linea (sive 12ma pollicis parte) variationis Barometri, si aëris pondus columnam mercurii 28 pollicum sustinet. Paullo majori parte pro eadem Barometri variatione mutatur Refractio, si mercurius infra 28 pollices sustinetur; et paullo minori, si supra. Sed et haec discrepantia negligi potest.

Ex Tabula secunda valor formulae $\frac{\varrho . \sin. ZS}{30 \sin. P}$ pro quavis altitudine et quovis angulo horario, peti potest. Refractionem $\varrho$ mediam assumsi inter *Bradleji* et *Lacaillii* determinationes. Tertiam Tabellam potuissem addere, pro factore $\frac{1}{\sin. PZ. \sin. PS}$; talem autem quisque pro Latitudine sui observatorii facile conficiet.

Si itaque ex his Tabellis correctio Culminationis, ex Altitudinibus correspondentibus inventae, computanda est; sumatur ex prima Tabula numerus cum signo suo, qui respondet datae variationi Thermometri et Barometri. Hic numerus multiplicetur per numerum ex 2da Tabula desumtum, qui respondet datae observatae altitudini, et dimidio temporis intervallo inter ambas observationes. Productum tandem dividatur per factum ex Cosinu Declinationis in Cosinum Latitudinis.

# TABULA I.

| Mutationes Caloris, sec. Therm. Reaumur. | | Variationes Barometri Lineis Paris. expressae. | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *Decrementum Altitudinis.* | | | | *Incrementum Altitudinis.* | | |
| | | 6. | 4. | 2. | 0. | 2. | 4. | 6. |
| *Incrementa.* | 14 | +0,079 | +0,073 | +0,067 | +0,061 | +0,055 | +0,049 | +0,043 |
| | 12 | 0,070 | 0,064 | 0,058 | 0,052 | 0,046 | 0,040 | 0,035 |
| | 10 | 0,062 | 0,056 | 0,050 | 0,044 | 0,038 | 0,032 | 0,026 |
| | 8 | 0,053 | 0,047 | 0,041 | 0,035 | 0,029 | 0,023 | 0,017 |
| | 6 | 0,044 | 0,038 | 0,032 | 0,026 | 0,020 | 0,014 | 0,008 |
| | 4 | 0,035 | 0,029 | 0,023 | 0,017 | 0,012 | 0,006 | 0,000 |
| | 2 | 0,027 | 0,021 | 0,015 | 0,009 | 0,003 | -0,003 | -0,009 |
| | 0 | 0,018 | 0,012 | 0,006 | 0,000 | -0,006 | --0,012 | 0,018 |
| *Decrementa.* | 2 | 0,009 | 0,003 | -0,003 | -0,009 | 0,015 | 0,021 | 0,027 |
| | 4 | 0,000 | -0,006 | 0,012 | 0,017 | 0,023 | 0,029 | 0,035 |
| | 6 | -0,008 | 0,014 | 0,020 | 0,026 | 0,032 | 0,038 | 0,04[illegible] |
| | 8 | 0,017 | 0,023 | 0,029 | 0,035 | 0,041 | 0,047 | 0,053 |
| | 10 | 0,026 | 0,032 | 0,038 | 0,044 | 0,050 | 0,056 | 0,062 |
| | 12 | 0,035 | 0,040 | 0,046 | 0,052 | 0,058 | 0,064 | 0,070 |
| | 14 | 0,043 | 0,049 | 0,055 | 0,061 | 0,067 | 0,073 | 0,079 |

# TABULA II.

| Altitud. | *Dimidium intervallum temporis inter utramque observationem.* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $1^{h}$. | $2^{h}$. | $2^{h}\ 30^{m}$. | $3^{h}$. | $3^{h}\ 30^{m}$. |
| 0°. | 252",43 | 130",67 | 107",32 | 92",40 | 82",35 |
| 2 | 153,10 | 79,20 | 65,09 | 56,04 | 49,95 |
| 4 | 95,01 | 49,18 | 40,39 | 34,78 | 30,99 |
| 6 | 65,96 | 34,15 | 28,05 | 24,14 | 21,52 |
| 8 | 51,01 | 26,41 | 21,69 | 18,67 | 16,64 |
| 10 | 41,35 | 21,40 | 17,58 | 15,13 | 13,49 |
| 15 | 27,30 | 14,13 | 11,61 | 9,99 | 8,91 |
| 20 | 19,97 | 10,34 | 8,49 | 7,31 | 6,51 |
| 25 | 15,29 | 7,91 | 6,50 | 5,60 | 4,99 |
| 30 | 11,82 | 6,12 | 5,03 | 4,33 | 3,86 |
| 40 | 7,25 | 3,75 | 3,08 | 2,65 | 2,37 |
| 50 | 4,31 | 2,23 | 1,83 | 1,58 | 1,40 |
| 70 | 0,99 | 0,51 | 0,42 | 0,36 | 0,32 |

| Altitud. | *Dimidium intervallum temporis inter utramque observationem.* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $4^{h}$. | $4^{h}\ 30^{m}$. | $5^{h}$. | $5^{h}\ 30^{m}$. | $6^{h}$. |
| 0 | 75",44 | 70",72 | 67",64 | 65",90 | 65",33 |
| 2 | 45,76 | 42,89 | 41,02 | 39,97 | 39,62 |
| 4 | 28,39 | 26,62 | 25,46 | 24,80 | 24,59 |
| 6 | 19,71 | 18,48 | 17,68 | 17,22 | 17,07 |
| 8 | 15,25 | 14,29 | 13,67 | 13,32 | 13,20 |
| 10 | 12,36 | 11,58 | 11,08 | 10,79 | 10,70 |
| 15 | 8,16 | 7,65 | 7,32 | 7,13 | 7,07 |
| 20 | 5,97 | 5,59 | 5,35 | 5,21 | 5,17 |
| 25 | 4,57 | 4,28 | 4,10 | 3,99 | 3,96 |
| 30 | 3,53 | 3,31 | 3,17 | 3,09 | 3,06 |
| 40 | 2,17 | 2,03 | 1,94 | 1,89 | 1,88 |
| 50 | 1,29 | 1,21 | 1,15 | 1,12 | 1,11 |
| 70 | 0,30 | 0,28 | 0,27 | 0,26 | 0,26 |